UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Servizio formazione permanente

Corso residenziale su:

Dimostrazione e verifica nell'ambito dell'insegnamento della matematica

Centro di cultura dell'Università Cattolica
Passo della Mendola (Trento)
19 – 25 luglio 1986

***La Scuola di Atene*, Raffaello Sanzio (1483-1520), 1510, cartone preparatorio, carboncino e biacca, 285×804 cm**

Milano, Pinacoteca Ambrosiana, 2019

Carlo Felice Manara

Dimostrazione e verifica

Indice

1 – *Premessa sulla conoscenza*. Per poter trattare il tema con un minimo di coerenza, pensiamo sia utile precisare le nostre idee sul processo della conoscenza umana; infatti dalle idee che abbiamo su questo processo dipende anche lo sviluppo che daremo al nostro intervento. Sappiamo che il problema della conoscenza è stato oggetto di riflessione e discussione sin dai primi tempi in cui l'uomo ha iniziato a costruire una filosofia, cioè a riflettere, in modo cosciente ed esplicito, sul proprio destino, sui propri atti, sulla propria condotta, sul significato del conoscere. Basterebbe, a questo proposito, richiamare qui il nome immortale di Socrate e le sue riflessioni sul significato e sulla portata delle operazioni della nostra mente, e sui fondamenti della nostra conoscenza.

Non intendiamo ora entrare in un terreno che potrebbe ben presto rivelarsi infido e pieno di insidie, e ci limiteremo pertanto a qualche richiamo a nozioni e constatazioni che hanno la loro origine nel più elementare e piatto buon senso, comune a tutte le creature umane che riflettono. In particolare avvertiamo che i termini da noi utilizzati nel seguito non vorranno avere alcun significato tecnico, in relazione a qualche sistema filosofico, ma avranno quei sensi che abitualmente vengono a loro attribuiti nell'impiego quotidiano delle persone comuni.

2 – *Momenti della conoscenza scientifica*. Per precisare ulteriormente l'ambito delle nostre considerazioni, vorremmo ricordare che possono esistere varie specie di conoscenza; tra l'altro, potremmo enumerare una conoscenza puramente sensibile, che ci viene dai sensi (i quali ci mettono in contatto con il mondo esterno a noi), ed una conoscenza razionale, che parte dalle sensazioni, ma cerca il suo fondamento ad un livello molto più profondo. Invero quella che noi nel seguito indicheremo come "conoscenza razionale" ci pare sia caratterizzata dalla ricerca della "spiegazione" delle ragioni, delle cause di ciò con cui entriamo in contatto per mezzo dei sensi. In altre parole, nel seguito intenderemo indicare con il termine "conoscenza razionale" una conoscenza che non si limita alla pura informazione, alla constatazione del fatto che esistono cose fuori di noi che hanno certe qualità (che i sensi ci mostrano), ma anche cerca in qualche modo di spiegare l'esistenza delle cose ed il fatto che esse sono quali ci appaiono.

Pertanto la conoscenza di cui ci occuperemo nel seguito non è – ripetiamo – un puro e semplice accumulo di informazioni, per quanto utili ed esatte, ma un tutto organico, gerarchicamente strutturato almeno in linea di principio, da cause ed effetti, da ipotesi e tesi. Infatti nella sapienza medievale la scienza era definita con la frase "*cognitio certa per causas*", ossia come una conoscenza che, almeno tendenzialmente, mira ad essere certa, e fondata sulla conoscenza delle cause, dei principi. Pertanto - ripetiamo ancora – la conoscenza, nella misura in cui è scientifica, non si riduce a un puro accumulo di informazioni, anche se numerosissime.

Per il seguito sarà utile soffermarci brevemente sul procedimento tipico con cui la scienza cerca di realizzare il proprio ideale, che abbiamo cercato di presentare sommariamente. Ci pare di poter dire che, nel procedimento con cui la scienza viene costruita, si possono distinguere certi momenti fondamentali, che enumereremo qui di seguito, ricordando tuttavia che l'enumerazione non vuole in alcun modo essere affermazione di successione cronologica, quasi che – di fatto – la costruzione di un sistema scientifico di conoscenze si realizzi con la successione temporale dei momenti che stiamo per presentare. Questi sono pertanto da intendersi come dei gradini di subordinazione logica, di gerarchia concettuale ideale, piuttosto che come elementi di scansione concreta e fattuale della realizzazione.

A nostro parere, i momenti della conoscenza scientifica possono essere identificati nel modo seguente:

a) Si ha anzitutto il momento dell'esperienza empirica, dell'osservazione del mondo e dei suoi fenomeni; questa osservazione è assolutamente necessaria, perché non si ceda alla tentazione di costruire delle teorie che non hanno alcun fondamento nei fatti. Tuttavia, ripetiamo ancora una volta, l'accumulo delle informazioni brute sullo stato di fatto della realtà che si vuole spiegare non è ancora conoscenza scientifica, pur costituendone il presupposto necessario.

b) Il secondo momento della costruzione di una conoscenza scientifica è la formulazione di ipotesi. Il contenuto di queste non può essere direttamente verificato, ma costituisce il fondamento del procedimento di cui diremo in seguito. La formulazione delle ipotesi assume delle forme che possono essere molto diverse, a seconda dell'oggetto delle varie scienze e degli scopi che si vogliono conseguire. Tuttavia in ogni caso le ipotesi riguardano certi fatti o certe circostanze che non si possono verificare direttamente, ma soltanto attraverso le conseguenze che se ne deducono con il ragionamento, utilizzando gli strumenti della logica.

   Nel caso della Fisica, ad esempio, la formulazione delle ipotesi avviene con la costruzione di un "modello", il quale dovrebbe rispecchiare la costituzione degli oggetti studiati, e con la formulazione di relazioni matematiche (in particolare per esempio equazioni, algebriche o differenziali) che legano le grandezze ritenute rilevanti pei fenomeni studiati. Un esempio tipico di queste ipotesi è dato dai vari "modelli" delle strutture atomiche e subatomiche che si sono succeduti nella storia, anche recente. Tali modelli traducono certi rapporti spaziali, immaginati – ripetiamo – e non direttamente osservati, tra le parti costitutive delle strutture considerate, e sono accompagnati da formule che dovrebbero esprimere i rapporti quantitativi, per esempio tra le distanze delle parti e le forze che esistono tra di esse.

c) Il collegamento fra il momento b) della formulazione delle ipotesi con la realtà che ci circonda avviene attraverso la deduzione. Infatti abbiamo detto che le ipotesi formulate non riguardano fenomeni direttamente osservabili; sono invece osservabili le conseguenze che si possono trarre dalle ipotesi stesse. Il passaggio dalle ipotesi alle conseguenze che se ne deducono può avvenire soltanto con un procedimento tipicamente mentale ed astratto, che viene chiamato *deduzione* o anche *dimostrazione*. È questo il momento in cui si manifesta in pieno la natura della conoscenza intellettuale, che è propria e tipica dell'uomo. Come già detto, possiamo infatti pensare che si possano dare varie specie di conoscenza; ma la conoscenza tipica dell'uomo è caratterizzata – a nostro parere – dal momento intellettuale deduttivo.

   Nel caso in cui le ipotesi formulate siano espresse con i metodi della Matematica, la deduzione assume la forma di un *calcolo*, cioè di una trasformazione puramente esteriore e formale di certe strutture linguistiche (formule, o, in generale, relazioni matematiche), trasformazione ottenuta rispettando certe regole sintattiche, che si esprimono in regole di calcolo. Il fatto che queste regole siano puramente formali e sintattiche è dimostrato dalle possibilità che si hanno oggi di affidare i calcoli alle macchine; il che dimostra che questo studio del procedimento può essere considerato puramente meccanico. Ciò garantisce la sicurezza delle deduzioni, che – a sua volta – è garanzia della validità della procedura di conoscenza scientifica. Tuttavia tale automaticità delle deduzioni, e la conseguente sicurezza che si ottiene, non esime dall'operazione squisitamente intellettuale che consiste nell'interpretazione dei significati dei simboli che vengono manipolati nel corso dei calcoli.

d) L'ultimo momento della conoscenza razionale (ultimo, ripetiamo, in ordine logico, non necessariamente nell'ordino cronologico della ricerca effettiva) si realizza nel confronto delle conseguenze, dedotte logicamente dalle ipotesi, con la realtà osservabile. È questo il momento in cui una determinata ipotesi, o un gruppo di ipotesi, può venire confermata oppure refutata, caso in cui ovviamente l'ipotesi viene lasciata cadere. Nel primo caso invece, la verifica del fatto che le conseguenze delle ipotesi non sono smentite dall'osservazione della realtà non costituisce per ciò stesso una prova della validità delle ipotesi adottate. Questa osservazione giustifica il continuo travaglio della scienza, che non può mai essere certa della validità assoluta dell'immagine della realtà che essa costruisce. Infatti è sempre possibile immaginare che possano essere scoperti nuovi fenomeni, i quali forse non sempre potranno entrare negli schemi forniti dalle teorie esistenti, e che pertanto costringeranno a formulare nuove ipotesi e a costruire nuove teorie.

La storia recente e non recente della scienza ci mostra una continua evoluzione delle idee, con la costruzione di teorie sempre nuove, che dominano masse sempre più numerose di fenomeni. Tuttavia questa continua variazione del panorama della conoscenza scientifica non giustifica una posizione di scetticismo nei riguardi della scienza: infatti lo scienziato fonda il proprio lavoro di ricerca sulla convinzione profonda della conoscibilità della realtà; convinzione che è tuttavia sempre accompagnata dalla constatazione dell'inadeguatezza delle teorie che si costruiscono, e che non possono mai pretendere di esaurire la ricchezza della realtà esistente.

3 – *La logica formale*. Abbiamo visto che nella costruzione di un teoria scientifica, cioè di una spiegazione razionale dei fenomeni e genericamente del mondo che ci circonda, esiste un momento insopprimibile, in cui avviene un'operazione di deduzione: dalle ipotesi non direttamente verificabili alle conseguenze, che sono sottoposte al tribunale di ultima istanza della verifica sperimentale. In altre parole, la conoscenza scientifica non può fare a meno della deduzione logica; questa costituisce una delle differenze fondamentali tra la conoscenza razionale ed il puro accumulo di informazioni e quindi è una proprietà costitutiva della conoscenza umana, a confronto con ogni altro tipo possibile di conoscenza. Consegue da queste constatazioni di buon senso che lo studio della logica è fondamentale per poter conseguire una formazione mentale rigorosa; ne viene inoltre che occorre coltivare quelle materie di studio che possono servire a dare una formazione al pensiero logicamente rigoroso.

Noi pensiamo che una di queste materie sia la Matematica, purché sia insegnata bene; e pensiamo addirittura che uno degli scopi, se non il principale, del suo insegnamento sia appunto la formazione al pensiero rigoroso, più che il conferimento delle poche nozioni necessarie per la vita associata dei paesi civili. Nozioni che formano un insieme sempre più esiguo, data la diffusione sempre crescente dei mezzi di calcolo automatico. Pensiamo inoltre che la formazione al pensiero rigoroso possa essere conferita ad ogni livello di scuola (quindi anche a livello elementare), ovviamente tenendo conto dello stato di maturazione intellettuale degli allievi.

Uno dei momenti principali della formazione matematica è naturalmente quello in cui si insegna a praticare l'operazione di deduzione che abbiamo riconosciuto fondamentale per la conoscenza scientifica. Spesso, nel ragionamento matematico, l'operazione di deduzione assume l'aspetto particolare di *dimostrazione*, a cui dedicheremo la nostra attenzione nel seguito di questo lavoro. Prima tuttavia vorremmo richiamare qualche nozione di logica elementare, cosa che ci risparmierà tempo e fatica nel seguito.

Non intendiamo qui definire che cosa sia la logica: su questo argomento hanno discusso per secoli i filosofi, dando alla domanda risposte non sempre univoche; ci basterà quindi pensare alla logica, per il momento ed in modo del tutto generico, come alla dottrina che insegna a ragionare nel modo giusto; in particolare ci occuperemo qui di quella branca della logica che viene chiamata *logica formale*; essa insegna a dedurre nel modo giusto. E qui intendiamo col termine *deduzione* l'operazione che, a partire da proposizioni accettate o considerate come vere oppure false, porta a costruire, con determinate procedure, altre proposizioni, delle quali si sa che sono certamente vere (oppure, rispettivamente, false), soltanto in forza delle procedure applicate.

Il fatto che una proposizione sia vera oppure falsa viene indicato come *valore di verità* della proposizione stessa; pertanto si potrebbe dire che la logica, partendo da proposizioni delle quali si conoscono i valori di verità, insegna a costruire altre proposizioni, con regole determinate, delle quali si conoscono con certezza i valori di verità.

Le proposizioni di partenza vengono dette *premesse*, o anche *ipotesi*; le proposizioni che si costruiscono vengono chiamate *conseguenze* e l'operazione di costruzione delle conseguenze a partire dalle premesse viene detta *inferenza,* o anche *deduzione*, o anche *dimostrazione*. Per esempio, supponendo che sia vera la proposizione seguente: Tizio vince sempre al totocalcio, possiamo dire che è certamente falsa la seguente: Tizio qualche volta non vince al totocalcio. Due proposizioni come quelle presentate vengono dette *contraddittorie* fra loro, e chiunque, riflettendo sul significato dei termini, accetta il fatto che se una di esse è vera l'altra è necessariamente falsa, e viceversa.

La logica classica si interessava dei ragionamenti e in particolare delle deduzioni che si ottengono con l'impiego del linguaggio comune, utilizzato dagli esseri umani per comunicare osservazioni, pensieri ed anche emozioni e stati d'animo. Di conseguenza uno dei punti di partenza degli studi di logica, nel senso classico del termine, era costituito dall'analisi dei nostri mezzi abituali di comunicazione verbale e scritta. In particolare quindi uno dei punti iniziali era costituito dall'analisi del discorso umano, in quanto utilizzato per comunicare dei pensieri. Pertanto il procedimento fondamentale seguito dalla logica classica andava dall'analisi degli elementi costitutivi delle proposizioni, all'analisi di queste ed infine allo studio del collegamento tra proposizioni, in modo da poter conoscere i valori di verità di proposizioni costruite in determinati modi a partire da certe premesse, come già detto. Noi quindi richiameremo sommariamente questo cammino, nella misura in cui i richiami serviranno per il seguito.

4 – *Regole di logica formale*. *Inferenza immediata*.

Le proposizioni che prenderemo in esame saranno del tipo delle seguenti:

A)Tutti i lombardi sono biondi, oppure: E) Nessun lombardo è biondo, oppure: I) Alcuni lombardi sono biondi, oppure: O) Alcuni lombardi non sono biondi.

Come si vede dagli esempi, le proposizioni che considereremo attribuiscono oppure negano certe proprietà (nella fattispecie il fatto di essere biondi) a certi soggetti. I termini che designano le proprietà considerate vengono chiamati *predicati*; quindi le proposizioni enunciate attribuiscono o non attribuiscono certi predicati a certi soggetti.

Il soggetto e il predicato di una data proposizione vengono chiamati *termini* della proposizione stessa; precisamente vengono chiamati *termini categorematici*, nome convenzionale per significare che le parole indicanti tali termini hanno significato anche se sono prese da sole. Altre parole, come "tutti", "alcuni", "nessuno", "non" e parole equivalenti vengono chiamate *termini sincategorematici*, per indicare che non hanno significato compiuto quando siano considerati da soli, ma acquistano significato solo quando siano presi insieme ad altri termini.

Le proposizioni che prenderemo in considerazione saranno costituite da un soggetto, un predicato ed una *copula verbale*, abitualmente espressa da una terza persona del verbo essere, cioè da una parola del tipo *è*, oppure *sono*, oppure da altre parole di significato equivalente, con le quali si esprime il giudizio che la qualità o la proprietà espressa dal predicato compete o non compete al soggetto. Ai fini della logica considereremo quindi soltanto le proposizioni che possono essere ricondotte a questa forma, e non gli altri discorsi, che pure vengono pronunciati quotidianamente, ma che costituiscono comunicazioni di stati d'animo, di emozioni, oppure non comunicano dei giudizi, ma mirano a suscitare stati d'animo ed emozioni negli ascoltatori o nei lettori.

Alle proposizioni sopra presentate vengono attribuiti i seguenti nomi. Alla A): *Universale affermativa*; alla E): *Universale negativa*; alla I): *Particolare affermativa*; alla O): *Particolare negativa*.

La A) e la E) sono dette *contrarie* far loro. La E) e la I) sono dette *subcontrarie*. La I) e la O) sono dette *subordinate*, rispettivamente della A) e della E). Viceversa la A) e la E) vengono dette *subordinanti*, rispettivamente della I) e della O). Infine la A) e la O), così come la E) e la I), sono dette *contraddittorie* fra loro. Abitualmente si dispongono i quattro simboli ai vertici di un rettangolo, nel modo seguente:

$$\begin{matrix} A & E \\ I & O \end{matrix}$$

Le proposizioni della prima riga sono le universali, quelle della seconda sono le particolari. Si usa dire che quelle della prima riga differiscono da quelle della seconda per la *quanti*tà. I termini sincategorematici "tutti", "nessuno", "alcuni" ed altri equivalenti sono anche chiamati *quantificatori*. Le proposizioni della prima colonna a sinistra sono le affermative, quelle della seconda sono le negative. Si dice che le proposizioni delle due colonne differiscono fra loro per la *qualità*.

Dall'esame degli esempi presentati, e di tutti quelli che si possono escogitare, si possono trarre delle *prime regole di logica formale* nel senso sopra precisato, cioè regole che permettono di decidere del valore di verità di certe proposizioni a partire da quelli di altre, in base alla sola forma delle proposizioni stesse. Enunceremo tali regole senza dimostrazione, ma solo con l'ostensione di esempi. Sarebbe infatti impossibile dimostrare la validità di tali regole, senza ricorrere a ragionamenti, che però sarebbero fondati sulla validità delle regole stesse che si vogliono dimostrare. Le regole sono le seguenti:

a) Le due proposizioni contrarie, A) e E), possono essere insieme false, mai insieme vere.
b) Le due subcontrarie I) e O) possono essere insieme vere, mai insieme false.
c) Considerate le due coppie di contraddittorie, A) e O), oppure E) e I), se una proposizione di una coppia è vera l'altra è falsa, e viceversa se l'una è falsa l'altra è vera.
d) Dalla falsità delle subordinate I) e O) si deduce la falsità delle subordinanti A) e E) rispettivamente.
e) Dalla verità delle subordinanti si deduce la verità delle subordinate.

Quest'ultima regola è stata talvolta contestata nel corso della storia da filosofi e logici, perché spesso è stata interpretata come affermazione implicita dell'esistenza di certi enti di cui la subordinata parla. Pertanto, per evitare eventuali perplessità, dichiariamo qui che noi, quando enunciamo una proposizione, intendiamo in ogni caso parlare di enti effettivamente esistenti. Osserviamo inoltre che le stesse regole non si applicano soltanto alle proposizioni del tipo di quelle che abbiamo presentato, ma valgono anche per proposizioni enunciate in modo diverso, come mostrano gli esempi seguenti, nei quali si mantengono le convenzioni di richiamo delle proposizioni, anche quando esse sono formalmente diverse da quelle presentate sopra. Si considerino i seguenti esempi:

A) Tizio vince sempre al totocalcio.
E) Tizio non vince mai al totocalcio.

I) Tizio talvolta vince al totocalcio.

O) Tizio talvolta non vince al totocalcio.

È facile verificare che per la proposizioni A), E), I), O) valgono le regole di inferenza immediata enunciate.

Analoghe osservazioni valgono anche per le proposizioni enunciate in forma che si chiama *modale*, come nei seguenti esempi:

A) È necessario che una certa cosa avvenga.

E) È impossibile che una certa cosa avvenga.

I) È possibile che una certa cosa avvenga.

O) È possibile che una certa cosa non avvenga.

Anche in questo caso valgono le regole prima enunciate. Tali regole sono chiamate *regole di inferenza immediata*, perché, ripetiamo, permettono di determinare i valori di verità di certe proposizioni a partire da quelli di certe altre, avendo riguardo alla sola forma delle proposizioni stesse.

Altre regole dello stesso tipo riguardano l'operazione che viene chiamata di *conversione*. Chiamiamo conversione di una proposizione l'operazione che, a partire da una data proposizione, conduce a costruirne una seconda che ha come soggetto il predicato della prima e come predicato il soggetto della prima. Così, per esempio, data la proposizione precedente E): Nessun lombardo è biondo, convertendo si ha: Nessun biondo è lombardo. Questa operazione di conversione, che non altera la quantità delle proposizioni considerate, viene chiamata *conversione semplice* (Conversio simplex); essa conduce da proposizioni vere a proposizioni pure vere nel caso delle proposizioni di tipo E), I).

È possibile considerare anche un secondo tipo di conversione, chiamata *conversione per accidens*. Con tale operazione non soltanto si cambiano di posto il soggetto e il predicato della proposizione data, ma anche se ne cambia la quantità, costruendo una proposizione particolare a partire da una universale. In tal modo si ottengono proposizioni vere a partire da proposizioni vere, nei casi in cui si agisca sulle proposizioni del tipo A), E). Così, ad esempio, a partire dalla A) di cui sopra, considerata come vera, si ottiene convertendo per accidens la seguente: Alcuni uomini biondi sono lombardi; e a partire dalla E), considerata vera, si ottiene, convertendo per accidens, la seguente: Alcuni uomini biondi non sono lombardi.

È possibile infine eseguire un terzo tipo di conversione delle proposizioni, chiamata *conversione per contrapposizione.* Essa si esegue scambiando di posto (come negli altri casi) il soggetto con il predicato di una proposizione e premettendo la negazione *non* a ciascuno di essi. Dunque a partire dalla A) si ottiene: Tutti i non biondi sono non lombardi. Da una proposizione di tipo O): Alcuni lombardi non sono biondi, si ottiene per contrapposizione: Alcuni non biondi non sono non lombardi. Ovvero, in forma più accettabile linguisticamente, sostituendo un'affermazione alle due ultime negazioni: Alcuni non biondi sono lombardi.

5 – *Il sillogismo*. Abbiamo trattato nel paragrafo 4 i casi più importanti di inferenza immediata. Vogliamo ora analizzare brevemente i casi in cui la deduzione dei valori di verità di una proposizione, a partire da quelli di altre, non è immediata. I casi più importanti di queste procedure sono quei ragionamenti schematici chiamati (da un termine greco) *sillogismi*. Consideriamo il seguente esempio:

1) Tutti i lombardi sono italiani.
2) Tutti i milanesi sono lombardi.
3) Tutti i milanesi sono italiani.

Si può osservare che nel ragionamento precedente sono coinvolti tre termini: milanesi, italiani, lombardi. I primi due sono soggetto e predicato della terza proposizione che viene chiamata *conclusione* del sillogismo; vengono spesso indicati convenzionalmente con i simboli S e P.

Il termine lombardi, che non entra nella conclusione, è soggetto nella prima proposizione e predicato nella seconda. Queste due proposizioni sono chiamate *premesse* del sillogismo, rispettivamente *premessa maggiore* e *premessa minore*, ed il termine "lombardi" è chiamato *termine medio* del sillogismo, e indicato spesso col simbolo M.

La logica classica ha catalogato 19 forme valide di ragionamento sillogistico, e le ha classificate in vari tipi, detti convenzionalmente *figure*, a seconda della posizione che il termine medio ha nelle due premesse. Precisamente si suole attribuire alla *prima figura* il sillogismo in cui il termine medio è soggetto in una delle premesse e predicato nell'altra (come nell'esempio), alla *seconda figura* il sillogismo in cui il termine medio è predicato in entrambe le premesse, alla *terza figura* il sillogismo in cui il termine medio è soggetto in entrambe le premesse.

I vari tipi di sillogismo validi sono richiamati abitualmente con certe parole tradizionali prive di senso per il linguaggio comune, che hanno soltanto valore di richiamo mnemonico. Precisamente ogni parola contiene certe vocali; le prime tre di esse sono A, oppure E, I, O e richiamano quindi le notazioni tradizionali delle proposizioni, così come già presentate. Con queste avvertenze, è facile costruire il sillogismo corrispondente ad ognuna delle parole convenzionali che elenchiamo nella tabella seguente.

TABELLA DEI TIPI VALIDI DI SILLOGISMO
Prima figura BARBARA; CELARENT; DARII; FERIO; BARALIPTON; CELANTES; DABITIS; FAPESMO; FRISESOMORUM
Seconda figura CESARE; CAMESTRES; FESTINO; BAROCO
Terza figura DARAPTI; FELAPTON; DISAMIS; DATISI; BOCARDO; FERISON

[Esempi.
BARBARA: **A** Tutti i lombardi sono italiani. **A** Tutti i milanesi sono lombardi. **A** Quindi tutti i milanesi sono italiani.
CESARE: **E** Nessun alpinista soffre di vertigini. **A** Tutti i miei amici soffrono di vertigini. **E** Quindi nessun mio amico è alpinista.
DARAPTI: **A** Ogni alpinista ama la montagna. **A** Ogni alpinista è sportivo. **I** Quindi alcuni sportivi amano la montagna.]

Le prime quattro parole che indicano i sillogismi della prima figura, e precisamente:

BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO

rammentano certi tipi di sillogismo che sono chiamati *forme perfette* della prima figura. Questi sillogismi possono essere considerati in certo modo come fondamentali, perché ad essi possono essere ricondotti gli altri tipi di sillogismo, con operazioni che si richiamano alle leggi di inferenza immediata, ed eventualmente invertendo l'ordine in cui le premesse vengono enunciate.
[Esempi:

1 CESARE **->** BARBARA: **E** Nessun alpinista soffre di vertigini. **A** Tutti i miei amici soffrono di vertigini. **E** Quindi nessun mio amico è alpinista. **-> 1'** **A** Tutti i sofferenti di vertigini sono non-alpinisti. **A** Tutti i miei amici sono sofferenti di vertigini. **A** Tutti i miei amici sono non-alpinisti].
Oppure: CESARE **->** CELARENT: **1''** **E** Nessun sofferente di vertigini è alpinista. **A** Tutti i miei amici sono sofferenti di vertigini. **E** Quindi nessun mio amico è alpinista.

2 DARAPTI -> FERIO: **A** Ogni alpinista ama la montagna. **A** Ogni alpinista è sportivo. **I** Quindi alcuni sportivi amano la montagna -> **2’ E** Nessun alpinista odia (= *non ama*) la montagna. **I** Qualche sportivo è alpinista. **O** Quindi qualche sportivo non odia (= *ama*) la montagna.

3 BAROCO -> FERIO: **A** Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo. **O** Alcuni quadrupedi non sono animali a sangue caldo (per esempio le lucertole). **O** Quindi alcuni quadrupedi non sono mammiferi. -> **3’ E** Nessun animale a sangue freddo è mammifero. **I** Alcuni quadrupedi sono animali a sangue freddo. **O** Quindi alcuni quadrupedi non sono mammiferi.]

Non ripetiamo qui le regole che una volta erano mandate a memoria da chi intendeva imparare la logica. Ci limitiamo a osservare che esse avevano un aspetto puramente formale, cioè riguardavano la forma esterna delle proposizioni, e non prendevano in considerazione il contenuto delle proposizioni stesse. In altre parole, tali regole riguardavano delle operazioni puramente mentali e astratte, e non riguardavano i problemi dell’aderenza delle proposizioni ad un’eventuale realtà esistente fuori di noi.

Osserviamo infine che chi ha qualche dimestichezza con quella che si chiama abitualmente insiemistica non avrà difficoltà a rappresentare le varie situazioni contemplate dai tipi di sillogismo sopra elencati con le figure convenzionali dette diagrammi di Eulero-Venn. Ci si potrà quindi convincere facilmente della validità degli schemi elencati, purché si tengano presenti le osservazioni fatte precedentemente, ricordando che intendiamo sempre parlare di enti *effettivamente esistenti*.

NdR. Sul sillogismo si può approfondire in Rete, trovando anche esempi di applicazioni dei diagrammi di Eulero-Venn, all’indirizzo http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/ssis04/sill.pdf

6 – *Dimostrazioni per assurdo*. Si è visto che le relazioni tra le proposizioni dei quattro tipi presentati, A, E, I, O permettono di enunciare le regole di inferenza immediata, cioè ripetiamo delle regole che permettono di determinare il valore di verità di certe proposizioni, che si ottengono con determinate procedure da altre, delle quali si conoscono pure i valori di verità. L’applicazione di queste regole permette di concludere certi procedimenti classici di dimostrazione che vengono chiamati *di riduzione all’assurdo*.

Un procedimento cosiffatto è basato sulle particolari regole di inferenza immediata che legano due proposizioni fra loro contradditorie; come è noto, tali regole assicurano che, date due proposizioni contradditorie fra loro, se una delle due è vera, l’altra è certamente falsa, e viceversa, se una di esse è falsa, l’altra è certamente vera. Pertanto, quando si voglia dimostrare che una proposizione è vera, si può dimostrare che la sua contradditoria è falsa. E per dimostrare che una proposizione è falsa basta dimostrare che essa conduce ad una contraddizione, cioè – come suol dirsi – all’*assurdo*.

Si consideri, ad esempio, il seguente sillogismo (S) dello schema BAROCO della seconda figura:

(1) **A** Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo (2) **O** Alcuni quadrupedi non sono animali a sangue caldo (per esempio le lucertole) (3) **O** Quindi alcuni quadrupedi non sono mammiferi.

Per dimostrare che la conclusione di questo sillogismo è valida, si può dimostrare che *è falsa la sua contradditoria*, cioè che è falsa la proposizione: (4) Tutti i quadrupedi sono mammiferi. A tal fine si costruisca un sillogismo (S’) dello schema BARBARA (forma perfetta della prima figura) assumendo come prima premessa la (1) del sillogismo proposto (S) e come seconda premessa la (4). Il sillogismo (S’) conduce alla conclusione seguente (5): Tutti i quadrupedi sono animali a sangue caldo. Ma la conclusione (5) è la contradditoria della proposizione (2), seconda premessa del sillogismo (S) proposto. Siamo quindi giunti ad una contraddizione, cioè all’assurdo. Questa situazione non può essere imputata allo schema BARBARA della prima figura, che è stato correttamente applicato; non può neppure essere imputata alla prima premessa del sillogismo S’ dello schema BARBARA, perché tale prima premessa coincide con la prima premessa del sillogismo (S) BAROCO, premessa che è accettata come vera.

***La Scuola di Atene*, Raffaello Sanzio (1483-1520), 1510, cartone preparatorio, particolare: *Euclide*. Milano, Pinacoteca Ambrosiana, 2019**

Quindi l'assurdo può derivare soltanto dalla falsità della proposizione (4), seconda premessa del sillogismo (S'), che è stata costruita come la contraddittoria della conclusione del sillogismo (S) proposto. Tale conclusione è quindi vera, come si voleva dimostrare.

Questo schema di ragionamento è stato analizzato già da Aristotele, ed è utilizzato varie volte da Euclide nei suoi Elementi. Negli Elementi si incontra per la prima volta nella Proposizione 6 del primo Libro, laddove Euclide, dopo aver dimostrato che se in un triangolo due lati sono uguali fra loro allora anche gli angoli opposti sono fra loro uguali, dimostra la proposizione inversa: se in un triangolo due angoli sono uguali, allora anche i lati opposti agli angoli considerati sono fra loro uguali.

Ancora per assurdo Euclide procede nella celebre proposizione 20 del libro IX, in cui dimostra che il numero dei numeri primi è infinito. Egli infatti suppone che sia dato il massimo numero primo, e da questa ipotesi deduce una contraddizione, perché dimostra che esiste un numero primo maggiore di quello.

7 – *Dimostrazione per induzione*. La dimostrazione per induzione viene utilizzata abitualmente in aritmetica. Essa è fondata sulla validità di una proposizione che viene abitualmente chiamata *legge* di *induzione* e sulla cui validità e natura sono sorte molte discussioni. A nostro parere, esse avevano la loro origine nell'idea che il concetto di numero naturale fosse un *dato*, un ente del quale la scienza deve investigare le proprietà. Pensiamo che la posizione di G. Peano sia coerente con quanto abbiamo esposto sulla definizione implicita dei concetti fondamentali della scienza; infatti Peano include la proposizione riguardante la legge di induzione nei postulati con i quali definisce il concetto di *numero naturale*. Pertanto, in questo ordine di idee la legge di induzione è vista in certo modo come costitutiva di tale concetto.

Si osserva inoltre che – come già osservato – non ha senso dire che questa proposizione, quando sia presa da sola, isolatamente dal contesto di una teoria, sia un postulato oppure un teorema: infatti nella trattazione ormai classica di Peano, essa non è dimostrabile in base alle precedenti, e quindi risulta essere una proposizione primitiva. Tuttavia M. Pieri costruisce l'Aritmetica su postulati diversi da quelli enunciati da Peano, e pertanto nella sua trattazione la legge di induzione viene enunciata come un teorema.

Enunceremo qui il postulato come è enunciato da Peano. Per comprendere tale enunciato ricordiamo che l'autore costruisce l'Aritmetica definendo *in forma implicita*, con 5 postulati, tre concetti fondamentali: una *classe*, quella dei numeri, indicata con il simbolo N; un *elemento* di questa classe, indicato con il simbolo 0; un operatore su elementi di N, indicato con il simbolo $succ(n)$ (successore di n), che fa corrispondere ad un numero n un altro numero, appunto il *successore di* n.

Con questa nomenclatura il *postulato di induzione* potrebbe essere enunciato nel modo seguente:

Sia A una classe di numeri. Il numero 0 appartenga ad A; se, dall'ipotesi che un numero n appartiene ad A si dimostra che anche il successivo appartiene ad A, allora ogni numero appartiene ad A. In altre parole, la classe esaurisce l'insieme di tutti i numeri.

La stessa proposizione può essere enunciata in altra forma, per esempio parlando di *proprietà* invece che di *classi*. Si otterrebbe allora l'enunciato seguente:

Se il numero 0 ha una certa proprietà e, se dall'ipotesi che essa sia posseduta da un numero n si dimostra che essa è anche posseduta da $succ(n)$, allora la proprietà è posseduta da ogni numero.

Ricorrendo ai suoi postulati, e in particolare al postulato di induzione, Peano riesce a dimostrare rigorosamente le proprietà formali delle operazioni dell'Aritmetica, da lui definite come si vedrà dagli esempi che seguono. Precisamente Peano definisce le operazioni sui numeri naturali in *forma ricorsiva*; il significato di questa espressione può essere compreso dall'analisi dei seguenti esempi.

L'operazione di *somma di due numeri*, indicata come al solito scrivendo il segno $+$ tra i simboli dei due numeri addendi, viene da Peano definita nel modo seguente: indicati con m ed n due numeri naturali qualunque, si ha:

$$(1)\, m + 0 = m; \quad (2)\, m + succ(n) = succ(m + n).$$

In base alla definizione dell'operazione, Peano dimostra le *proprietà formali della somma*: commutativa e associativa. Per esempio la proprietà *commutativa* viene dimostrata in vari passi, il primo dei quali consiste nella dimostrazione della proprietà formale espressa dalla relazione, valida quale che sia l'intero m: $(3)\, 0 + m = m$. Tale dimostrazione viene ottenuta con una procedura suggerita dallo stesso enunciato della legge di induzione. Anzitutto si verifica che la (3) è valida per $m = 0$. Ciò si ottiene dalla relazione (1) di definizione della somma, ponendo in essa $m = 0$.

[NdR. Nota: la dimostrazione potrebbe proseguire così:

Supposto che la (3) sia valida per un determinato m, si dimostra che essa vale anche per $succ(m)$. Poiché si ha per la (2): $0 + succ(m) = succ\,(0 + m)$, ricordando che la (3) è supposta valida per ipotesi, si può scrivere: $0 + succ(m) = succ(m)$, e questa è la (3), scritta ponendo il successivo di m al posto di m.

Supponiamo ora che si abbia (4) $m + n = n + m$ per ogni m e per un determinato n; occorre dimostrare che vale anche l'uguaglianza (5) $m + succ(n) = succ(n) + m$. Si ha:
(6) $m + succ(n) = succ(m + n)$ per definizione; detto $m - 1$ l'*antecedente* di m, si ottiene ancora:
(7) $succ\,(n) + m = succ(succ(n) + (m-1))$. Si dimostra ora che:

$$(8)\, succ(n) + (m-1) = n + m.$$

La (8) è vera per ogni n con $m = 0$; supposta vera per un determinato m, si dimostra vera per $succ(m)$. Infatti: $succ(n) + (succ(m) - 1) = succ(n) + (m) = succ(succ(n) + m - 1) = succ(n+m) = n + succ(m)$, che è la (8) scritta con $succ(m)$ al posto di m.
Dunque si completa la dimostrazione della proprietà commutativa della somma, poiché:

$$succ(n) + m = succ(n+m) = succ(m+n) = m + succ(n). \;]$$

Appunti dattiloscritti rieditati, ottobre 2019

NdR

Vi sono vari scritti di Carlo Felice Manara sulla *Logica*, presenti nel Sito: www.carlofelicemanara.it
Fra di essi:

Appunti di logica elementare. ISU Università Cattolica, Milano, 1983

Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo, 1987

Il certo e il probabile. Piccolo manuale di logica e di calcolo della probabilità (La Scuola, Brescia, 1989).

L'insegnamento della Logica nella scuola dell'obbligo.
L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 9 (1986), 40-55.

Matematica e logica. Atti del Convegno "*Pensiero scientifico. Fondamenti ed epistemologia*". Quaderni di Innovazione e Scuola, n. 29. IRRSAE Marche, Ancona, 1996.

La logica e lo sviluppo storico della matematica. Emmeciquadro, 5 (1999),75-90.

Altre indicazioni si trovano nella sottosezione LOGICA della voce DOCENZA del Sito
www.carlofelicemanara.it

Si può vedere in rete all'indirizzo
http://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2015/08/atti_XIX_Congresso_Bologna.pdf
Claudio Bernardi: La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi (pg. 626 – 631)

La Scuola di Atene*, Raffaello Sanzio (1483-1520), 1510, cartone preparatorio, particolare: *Platone e Aristotele.

Milano, Pinacoteca Ambrosiana, 2019